

# Taller de Geometría dinámica: explorando los centros de los triángulos

Para hacer geometría es importante ver las figuras objeto de nuestro estudio y manipularlas. Antes de la invención del papel, los antiguos geómetras dibujaban sobre la arena u otros materiales. Hasta hoy y durante siglos la Geometría se ha servido del papel, el lápiz y otros instrumentos de dibujo. Desde hace unos años es posible sustituir el cuaderno por la pantalla del ordenador y los lápices, reglas, compás, etc. por el ratón y el teclado.

Surge así la *Geometría dinámica*, mediante la cual se multiplican las posibilidades de estudiar propiedades en los objetos geométricos, establecer conjeturas, comprobarlas y realizar investigaciones.

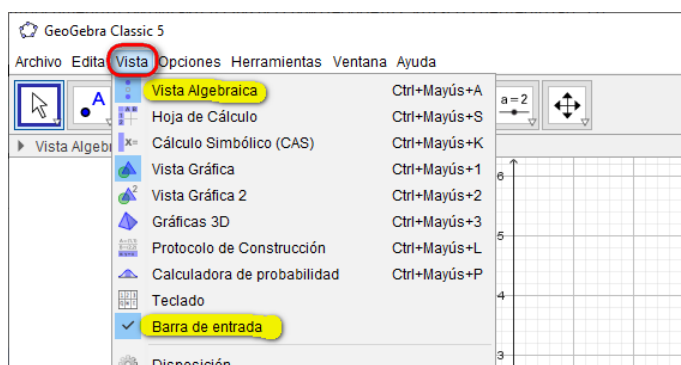
Durante la sesión intentaremos comprobar esas potencialidades (trabajando con el programa *GeoGebra*) estudiando **los centros de los triángulos**.

En Geometría, la figura más estudiada ha sido y sigue siendo el triángulo. Casi todo es reducible a triángulos y eso convierte al *rey de los polígonos* en una de las herramientas más poderosas de la Geometría. Gracias al triángulo se pudo medir la Tierra, calcular la distancia a la Luna o, sencillamente construir y articular una grúa.

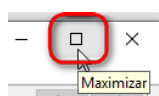
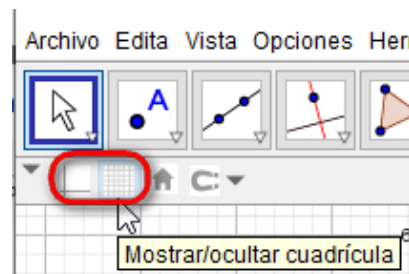
## ***Puesta en marcha del programa***

Para iniciar el programa, en el aula de la UPNA, haz doble *clic* sobre acceso directo correspondiente a **GeoGebra5** de la carpeta *Programas*<sup>1</sup>.

Al iniciar el programa aparecen más elementos de los que hoy necesitaremos. Es recomendable ocultarlos: desactiva, en el menú **Vista**, la **Vista Algebraica** y la **Barra de Entrada**.



Ocultar también los *Ejes* y la *Cuadrícula*:



Es aconsejable pulsar el botón **Maximizar** para trabajar más cómodamente sobre la hoja en blanco o área de trabajo que *GeoGebra* nos muestra.

<sup>1</sup> A la carpeta *Programas*, se accede desde el *Escritorio virtual*, tras seleccionar "Industriales-Teleco"

### Actividad 1: Medianas y Baricentro de un triángulo.

1. Empecemos construyendo un triángulo. Para ello, selecciona (mediante un *clic* sobre el icono correspondiente ) la herramienta **Polígono**. Luego haz *clic* sobre tres puntos de la zona gráfica y cierra el triángulo con un último *clic* sobre el primero de los vértices.

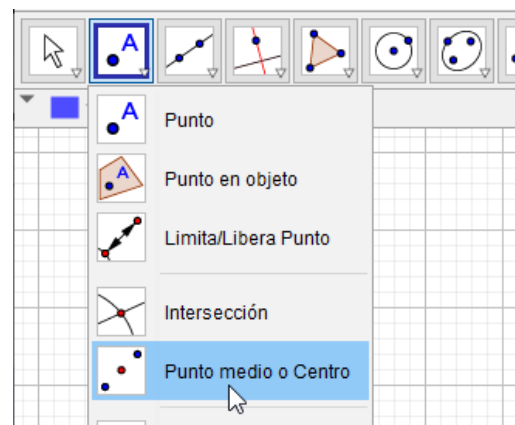
Una vez construido el triángulo, puedes modificarlo seleccionando la herramienta principal  **Elige y Mueve** y arrastrando cualquiera de sus vértices.

2. Vamos a visualizar ahora los puntos medios de cada lado. Para ello hemos de localizar la herramienta correspondiente en la barra de herramientas:



Cada uno de los botones que estás viendo permite desplegar un menú diferente. Pulsa

en el segundo de ellos sobre el triangulito de la parte inferior derecha  y comprobarás cómo se abre el correspondiente menú y cómo cambia el aspecto del botón cuando seleccionas la opción deseada:



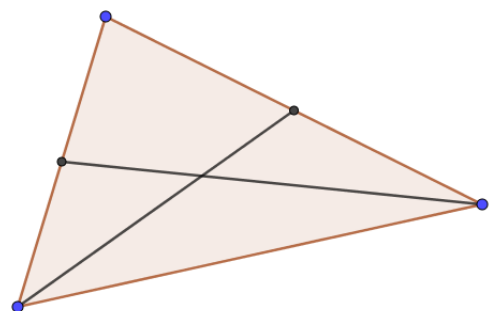
Ahora sí, dibuja los tres puntos medios.

3. Si trazamos segmentos que unan cada vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto, obtendremos las medianas. Dibuja,

mediante la herramienta  **Segmento**, las medianas desde dos de los vértices.

5. Las dos medianas se cortan en un punto.

(Aprovecha la herramienta  **Intersección** para dibujarlo).



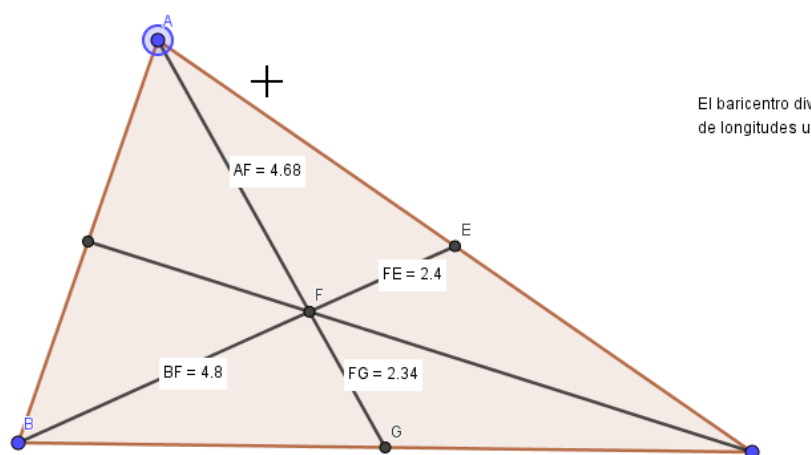
6. Comprueba que la tercera mediana también pasa por ese punto, independientemente de la forma del triángulo. Ese punto es el *baricentro* del triángulo y en él concurren las tres medianas.

7. Comprueba que esa concurrencia se da en todo tipo de triángulos: arrastra alguno de sus vértices y observa los cambios.

8. Utiliza la herramienta  **Distancia o Longitud** para medir los dos segmentos en que el baricentro divide a una cualquiera de las tres medianas.

9. Modifica la posición de los vértices del triángulo y observa cómo cambian las longitudes anteriores. ¿Observas alguna relación entre ellas?

10. Comprueba si esa relación se cumple también en las otras dos medianas. Inserta un comentario (  **Texto**) expresando la propiedad relativa al baricentro y a los segmentos que determina sobre cada una de las medianas.



### Para Guardar tu trabajo

Encima de la fila de botones aparece una línea de comandos (*Archivo, Editar, ...*) al estilo de muchos otros programas conocidos con menús para gestionar las figuras y los archivos que generes con este programa.

Haz clic en **Archivo, Guardar**.

Un consejo: si en el campo *Nombre*: escribes solamente *baricentro* el propio programa se encargará de añadir la extensión *.ggb*

Posteriormente, pulsa en **Archivo, Nuevo** para iniciar la siguiente actividad.

### A propósito del baricentro:

El baricentro de un triángulo es también su centro de masas. Eso significa que un triángulo de material rígido y uniforme se podría mantener en equilibrio apoyándolo sobre su baricentro.



## Actividad 2: Alturas y Ortocentro de un triángulo.

Si trazamos la recta perpendicular a un lado del triángulo por el vértice opuesto, obtendremos una altura. La distancia que separa a un vértice del lado opuesto es fundamental para calcular el área del triángulo.



Dibuja un triángulo.



Dibuja en él una altura.



Mueve los vértices y comprueba la validez de tu construcción (es decir que la altura sigue siendo la perpendicular a un lado por el vértice opuesto).



Dibuja una segunda altura. Estas líneas se cortan en un punto, que llamaremos O.



Dibuja la tercera altura y comprueba que O pertenece a ella.

Ese punto es el *ortocentro* del triángulo.

Al mover los vértices comprobarás que el ortocentro no siempre se sitúa en el interior del triángulo.

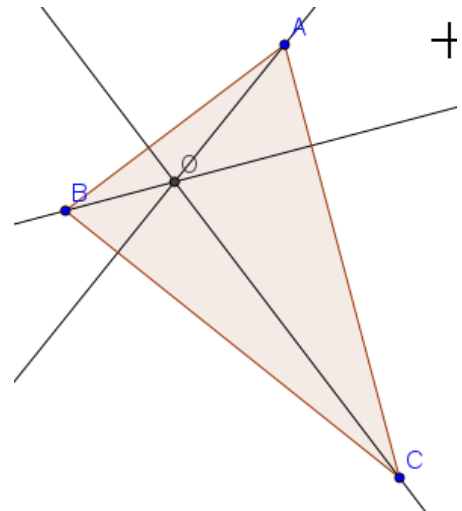


Investiga e incluye un comentario aclarando en qué casos es interior, exterior o pertenece a alguno de los lados del triángulo.



Ayuda: Si seleccionas la herramienta **Ángulo**, un clic en el interior del triángulo hará que se visualicen los valores de sus tres ángulos.

Guarda la figura en *a2ortocentro.ggb*



## Actividad 3: Mediatrices y Circuncentro de un triángulo.

Las mediatrices de un triángulo pasan por el punto medio de cada lado y además son perpendiculares a él.



Dibuja un triángulo. Traza sus mediatrices (Selecciona la herramienta **Mediatriz** y haz clic sobre cada lado del triángulo).



Comprueba que las tres concurren en un único punto.

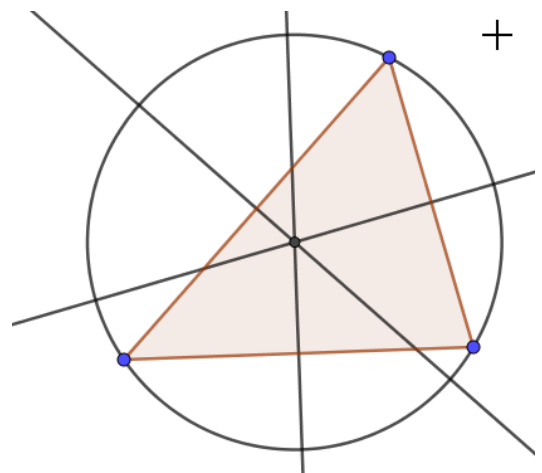


Dibuja la circunferencia de centro en ese punto que pasa por uno de los vértices.



Comprueba que los otros dos vértices también pertenecen a esa misma circunferencia.

Diremos que esa *circunferencia* está *circunscrita* al triángulo y que su centro P es el *circuncentro* del triángulo.





Mueve los vértices del triángulo y comprueba los cambios en la figura.

Investiga: ¿De qué depende que el circuncentro esté dentro, fuera o sobre uno de los lados del triángulo? ¿Cuál de los tres vértices del triángulo queda más cerca del circuncentro?



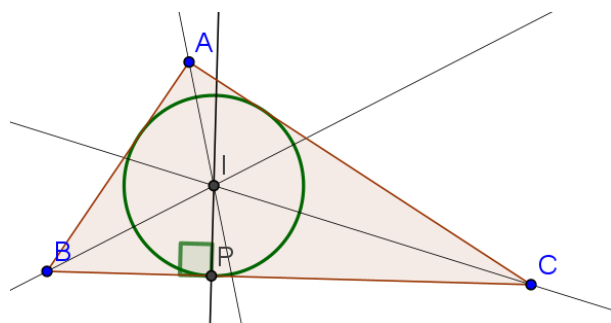
Escribe el resultado de tu observación utilizando la herramienta **Texto**.

Guarda la figura en *a3circuncentro.ggb*

#### Actividad 4: Bisectrices e Incentro de un triángulo.



Dibuja un triángulo y sus tres bisectrices. Tras seleccionar la herramienta **Bisectriz** habrás de hacer *clic* sobre los tres vértices del triángulo (para cada bisectriz, en el orden adecuado). Comprueba que concurren en un único punto I (el *incentro*).



Dibuja una circunferencia con

centro en el incentro y que toque un lado del triángulo en un único punto (P). Para hacer esto, debes hacer que la circunferencia sea tangente a ese lado del triángulo, por tanto, debe pasar por la intersección entre el lado y la perpendicular al mismo por el centro de la circunferencia.



Antes de hacer esto último, debes pensarlo con cuidado y asegurarte de que lo has entendido. (La figura adjunta puede ayudarte)



Ya has dibujado la circunferencia ¿qué ha ocurrido? ¿Corta a más de un lado del triángulo? Arrastra alguno de los vértices para modificar el triángulo y comprobar la consistencia de la imagen.



Investiga de qué lado del triángulo queda más cerca el incentro e inserta un texto justificando tus conclusiones.

Guarda la figura en *a4incentro.ggb*

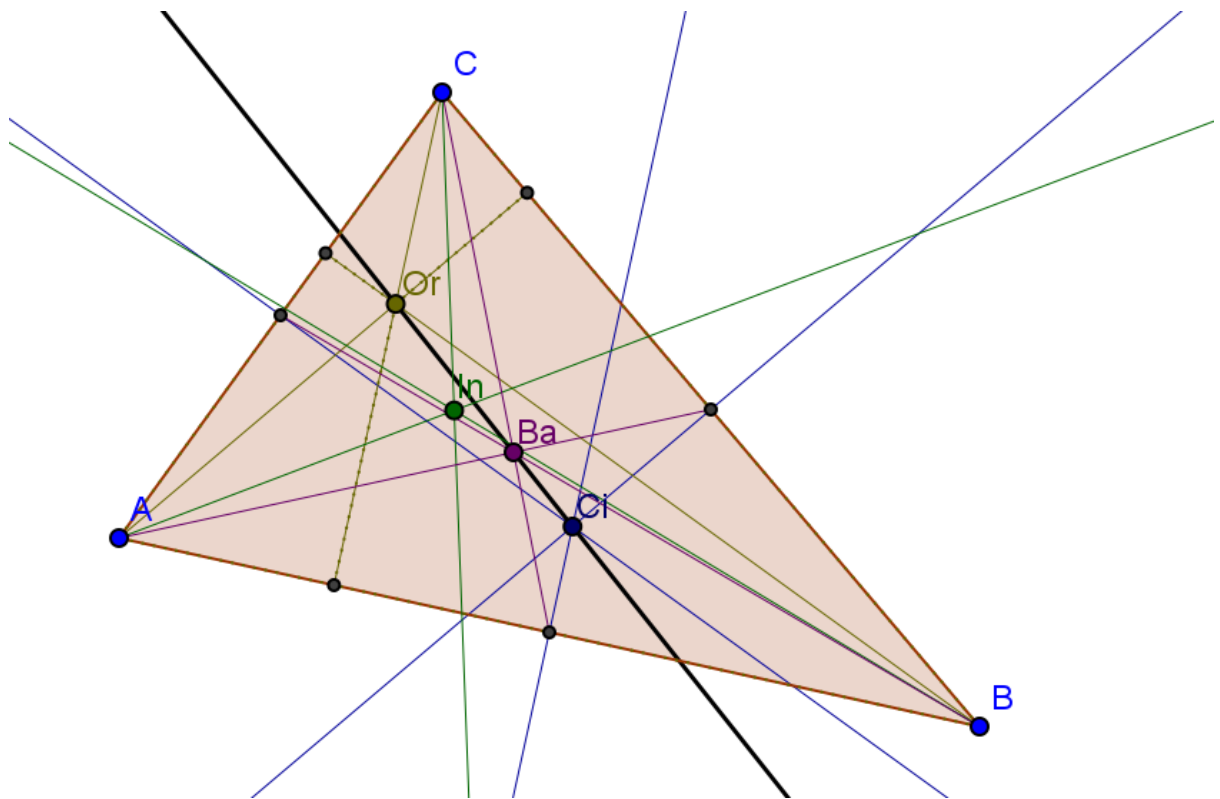
#### Actividad 5: (EXTRA) Relaciones entre los centros de un triángulo.

Dibuja un triángulo escaleno. Sitúa en él, usando diferentes colores, las mediatrices, el circuncentro, las bisectrices, el incentro, las medianas, el baricentro, las alturas y el ortocentro.

Mueve los vértices del triángulo. Fue el genial Leonard Euler (1713-1789) el primero en darse cuenta de que tres de esos cuatro centros del triángulo permanecen alineados, independientemente de su forma. Dibuja la recta que los une (la Recta de Euler)

Guarda la figura en *a5centros.ggb*

Mueve de nuevo los vértices y analiza qué les ocurre a los distintos centros y a la propia recta de Euler, según que el triángulo sea isósceles, equilátero, obtusángulo, rectángulo, ... Resume tus conclusiones.



(Ayuda para mejorar la estética en  
<https://youtu.be/fvv883LbwZE> )



## Actividades de ampliación

Utilizar GeoGebra para intentar resolver alguno de los problemas o cuestiones siguientes, relativos todos a la Geometría de los triángulos (o de los polígonos)

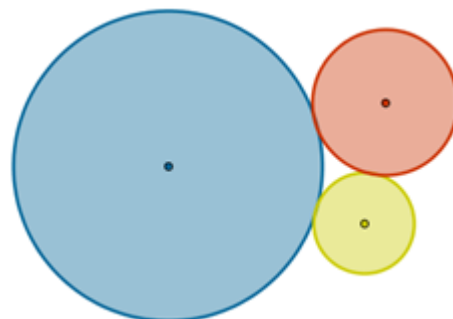
### Actividad 2.1: Tres círculos tangentes

Dados tres puntos del plano, determinar la posición de otras tantas circunferencias, centrada cada una en uno de los puntos, de modo que las tres sean tangentes entre sí.

La construcción ha de ser consistente, es decir que al modificar la posición de alguno de los tres puntos, las circunferencias cambien para seguir siendo tangentes.

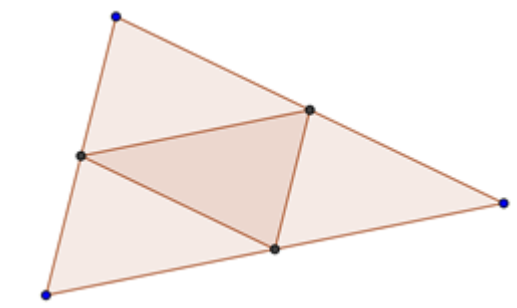
Si no se te ocurre el modo de conseguirlo, entra en la página web *Tres círculos del Proyecto Gauss*:

[https://geogebra.es/gauss/materiales\\_didacticos/eso/actividades/geometria/acertijos/tres\\_circulos/actividad.html](https://geogebra.es/gauss/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/acertijos/tres_circulos/actividad.html)



### Actividad 2.2: Triángulos y cuadriláteros auxiliares

1. Une los puntos medios de los lados de un triángulo.  
Al triángulo así obtenido se le llama triángulo auxiliar.
2. Compáralos: ¿qué tienen en común y qué diferencia a un triángulo y a su triángulo auxiliar?  
¿Qué relación hay entre sus medidas (longitudes, ángulos y áreas)?
3. ¿Y si construimos el auxiliar del auxiliar? ¿Y si repetimos el proceso indefinidamente?
4. Haz algo análogo con cuadriláteros: ¿cómo son los cuadriláteros auxiliares? ¿Qué forma tienen? ¿Qué pasa con las medidas de sus áreas?
5. ¿Cómo ha de ser un cuadrilátero para que su auxiliar sea un rombo? ¿Y para que sea rectángulo?

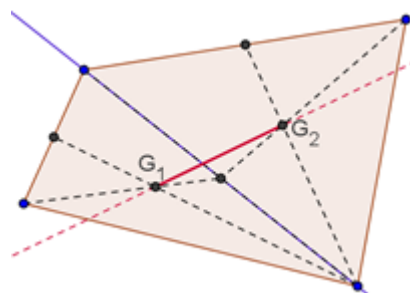


### Actividad 2.3: Centro de gravedad de un cuadrilátero

Te proponemos el siguiente método para encontrar el centro de masas de un cuadrilátero:

1. Traza una diagonal del cuadrilátero y encuentra los centros de masas de cada uno de los dos triángulos determinados. Por las leyes de la dinámica, el centro de masas del cuadrilátero ha de estar sobre la recta que une los dos centros de masas de los triángulos que lo componen

2. Repite el mismo proceso a partir de la otra diagonal del cuadrilátero, hasta obtener una segunda recta que también pasará por el centro buscado.
3. Determina el centro de masas del cuadrilátero como punto de corte de esas dos rectas.
4. ¿Es posible que el centro de gravedad de un cuadrilátero esté en su exterior?
5. Investiga cuándo el centro de masas de un cuadrilátero coincide con el corte de sus diagonales o las de su *paralelogramo de Varignon* (el construido a partir de los puntos medios de los lados) o las de su *paralelogramo de Wittenbauer* (a partir de los puntos que trisecan los lados)



|                                                                                                                                             |                                                                                                                                                   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Diagrama de un cuadrilátero con sus diagonales y el paralelogramo de Varignon construido a partir de los puntos medios de los lados.</p> | <p>Diagrama de un cuadrilátero con sus diagonales y el paralelogramo de Wittenbauer construido a partir de los puntos que trisecan los lados.</p> |
| Un cuadrilátero y su paralelogramo de Varignon                                                                                              | Un cuadrilátero y su paralelogramo de Wittenbauer                                                                                                 |

### Actividad 2.4: Comprobación de teoremas famosos

Haz sendas construcciones para comprobar cómo se cumplen el Teorema de Pitágoras y el de Napoleón.

### Problemas de la Olimpiada matemática

( <https://rsme.es/olimpiada-matematica-espanola/> )

**Problema 1 F.L. 2025:** Sea  $ABCD$  un paralelogramo y sea  $M$  un punto en la diagonal  $BD$  que cumple  $MD = 2BM$ . Las rectas  $AM$  y  $BC$  se cortan en un punto  $N$ . ¿Cuál es el cociente entre el área del triángulo  $MND$  y el área del paralelogramo  $ABCD$ .

**Problema 3 F.L. 2026:** Sea  $I$  el incentro de un triángulo  $ABC$  en el que los tres lados tienen longitudes distintas. La recta  $AI$  corta de nuevo a la circunferencia circunscrita al triángulo  $ABC$  en el punto  $D$ . La circunferencia que pasa por los puntos  $C$ ,  $D$  e  $I$  corta nuevamente a la recta  $BI$  en el punto  $K$ . Demuestra que el triángulo  $BKC$  es isósceles.